

Zur Erfassung der transversalen Normalspannungen in Schalen

Fiolka, M.*¹ and Matzenmiller, A.**¹

¹ Universität Kassel, Institut für Mechanik, Mönchebergstr.7, D-34109 Kassel

Für ein Schalenelement der oberflächenorientierten Schalentheorie werden die Versteifungseffekte durch Kombination der Assumed Strain Methode und der Enhanced Assumed Strain Methode beseitigt. Die Multidirektorkinematik ermöglicht die genaue Erfassung der transversalen Normalspannungen in Schalen unter äußeren Querlasten. Das Element eignet sich zur Beschreibung dünnwandiger Faserverbundstrukturen und ist für grosse Rotationen und kleine Verzerrungen entwickelt worden. Anhand von zwei Beispielen wird das Elementverhalten demonstriert.

© 2004 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

1 Einleitung

Zur genaueren Modellierung der Lagerung und Lasteinleitung, wie auch zur Kopplung zwischen massiven und dünnen Bauteilen bietet sich eine dreidimensionale Schalentheorie an. Werden die Schalenlaibungen zur Beschreibung des Schalenkörpers genutzt, führt dieses Vorgehen zu einer oberflächenorientierten Schalentheorie [1]. Sie ist in der Lage dreidimensionale Werkstoffmodelle zu nutzen, zur genaueren Erfassung des dreidimensionalen Verhaltens sind allerdings Schalentheorien höherer Ordnung oder aber Multidirektortheorien notwendig. Da das Schalenelement zur Berechnung von Faserverbundstrukturen eingesetzt werden soll wird der letztere Weg eingeschlagen.

2 Schalenkinematik

Die Position \mathbf{X} eines materiellen Punktes \mathcal{P} des Schalenkörpers wird durch die Ortsvektoren der oberen und unteren Schalenlaibung \mathbf{X}^o und \mathbf{X}^u mit $(-1 \leq \theta \leq 1)$ beschrieben.

$$\mathbf{X}(\xi) = \frac{1}{2}[(1 + \theta)\mathbf{X}^o(\xi, \eta) + (1 - \theta)\mathbf{X}^u(\xi, \eta)] \quad \text{mit} \quad \xi = (\xi, \eta, \theta) \quad (1)$$

Durch diese kinematische Annahme bleiben materielle Linien zwischen den Laibungen auch nach der Deformation geradlinig, was der Geradlinigkeitshypothese entspricht. Wie bei Schalen üblich wird eine Referenz- oder Mittelfläche mit dem Ortsvektor \mathbf{X}^m eingeführt.

$$\mathbf{X}(\xi) = \frac{1}{2}[\mathbf{X}^o(\xi, \eta) + \mathbf{X}^u(\xi, \eta)] + \frac{1}{2}\theta[\mathbf{X}^o(\xi, \eta) - \mathbf{X}^u(\xi, \eta)] = \mathbf{X}^m(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\theta H(\xi, \eta)\mathbf{D}(\xi, \eta) \quad (2)$$

Der Schalendirektor \mathbf{D} ist ein Einheitsvektor und H entspricht der Schalendicke, die sich während der Deformation ändern kann. Somit verfügt die Formulierung der Schalenverformung über sechs kinematische Freiheitsgrade, so daß von einer 6-Parametertheorie gesprochen werden kann.

3 Massnahmen gegen Versteifungseffekte

Zur Diskretisierung des momentanen und anfänglichen Ortsvektors im Rahmen der finiten Elementmethode werden trilineare Ansatzfunktionen verwendet. Die Beschreibung in konvektiven Koordinaten wird genutzt. Aufgrund der niedrigen Interpolationsordnung leidet das Element unter unerwünschten Versteifungseffekten. Durch einen sogenannten Assumed Strain Ansatz [2] wird die exzessive Querschubversteifung verhindert. Die Dickenversteifung - sie äussert sich durch künstliche Dickenspannungen bei reiner Biegung - wird durch einen ähnlichen Assumed Strain Ansatz [3] beseitigt.

Die lineare Dickendehnung, die für die Beseitigung des Querdehndefekts im Fall der Biegung unbedingt erforderlich ist, wird durch die EAS-Methode [4] ergänzt, so daß eine 7-Parametertheorie entsteht. Die erweiterte Verzerrung $\tilde{\mathbf{E}}_{33}$ wird auf eine kontravariante Basis \mathbf{g}_0^i im Elementmittelpunkt bezogen, wobei die Matrix \mathbf{T}^0 [5] zwischen dem Basissystem im Elementmittelpunkt und den kontravarianten Basissystemen an den Gausspunkten transformiert.

$$\tilde{E}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \tilde{E}_{kl}^0 \mathbf{g}_0^k \otimes \mathbf{g}_0^l \Leftrightarrow \tilde{E}_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_0^k \tilde{E}_{kl}^0 \mathbf{g}_0^l \cdot \mathbf{g}_j \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}_{33} = \mathbf{T}^0 \tilde{\mathbf{E}}_{33}^0 \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{E}}_{33}^0 = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \mathbf{M} \alpha \quad (3)$$

Die Erweiterung der Dickenverzerrung mit drei Termen $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \theta & \theta\xi & \theta\eta \end{bmatrix}$ ist gegenüber einer Erweiterung mit nur einem Term $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \theta \end{bmatrix}$ notwendig, um den Patchtest zu erfüllen.

* Corresponding author: DIPL.-ING. M. FIOLOKA E-MAIL: fiolka@maschinenbau.uni-kassel.de, PHONE: +49 561 804 2058, FAX: +49 561 804 2720

** PROF. DR.-ING A. MATZENMILLER E-MAIL: amat@maschinenbau.uni-kassel.de

4 Multidirektorkinematik

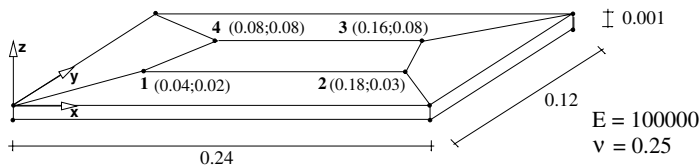
Gemäß der Multidirektortheorie wird ein stückweise linearer Verlauf der materiellen Linien in Dickenrichtung angenommen. Wird die Schale in einzelne Schichten unterteilt und wird in jeder Schicht ein eigener Direktor auf der Schichtreferenzfläche zur Beschreibung der Kinematik aller Punkte außerhalb der Referenzfläche eingeführt, so wird die Referenzfläche einer beliebigen Schicht durch den Ortsvektor der unteren Referenzfläche und einer Summe von Schichtdirektoren beschrieben. Durch die Multidirektortheorie kann jeder transversale Spannungsverlauf beliebig genau approximiert werden.

$$\mathbf{X}_L^m(\xi, \eta) = \mathbf{X}_1^m(\xi, \eta) + \frac{1}{2}H_1(\xi, \eta)\mathbf{D}_1(\xi, \eta) + \sum_{n=2}^{L-1} H_n(\xi, \eta)\mathbf{D}_n + \frac{1}{2}H_L(\xi, \eta)\mathbf{D}_L(\xi, \eta) \quad (4)$$

5 Numerische Beispiele

5.1 Patchtest

Der Patchtest [6] für Plattenelemente ist geeignet, um zu überprüfen, ob Starrkörperbewegungen und konstante Spannungszustände durch das finite Element abgebildet werden können. Im vorliegenden Fall zur Untersuchung von Schalenelementen wird ein Verschiebungsfeld $w(x, y)$ und zwei Verdrehungen $b_x(x, y)$ und $b_y(x, y)$ am Rand des Patches aus fünf Elementen aufgebracht. Der Patchtest ist bestanden, falls die Knotenverschiebungen 1 bis 4 das Verschiebungs- und Verdrehungsfeld gemäß Gl. (5)-(7) exakt erfüllen. Die exakte Lösung für reine Biegung um zwei Achsen stellt sich nur dann ein, wenn die Dickendehnung \mathbf{E}_{33} zumindest mit drei Termen erweitert wird.



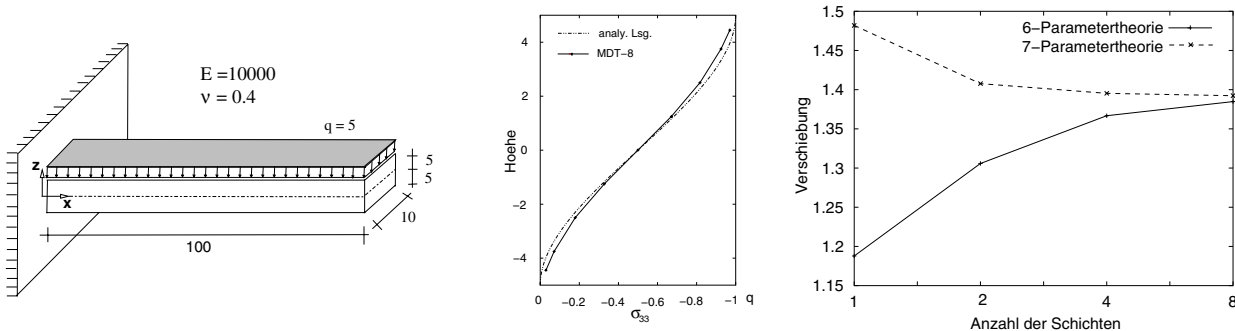
$$w(x, y) = 0.5 \cdot 10^{-3}(x^2 + xy + y^2) \quad (5)$$

$$b_x(x, y) = 10^{-3}(y + x/2) \quad (6)$$

$$b_y(x, y) = 10^{-3}(-y - x/2) \quad (7)$$

5.2 Kragarm unter Auflast

Der abgebildete Kragarm (alle Knotenverschiebungen an der Einspannstelle sind unterdrückt) wird mit zehn Elementen in Längsrichtung modelliert, einem Element über die Breite und einer variablen Anzahl von kinematischen Schichten über die Höhe. Mit steigender Anzahl der Schichten approximiert das Schalenelement die Dicken- und Querschubspannungen besser. Die Durchbiegung an der Kragarmspitze ist für die 6-Parametertheorie und die 7-Parametertheorie dargestellt. Die Abweichung zwischen der Singledirektortheorie (eine Schicht) und der Lösung gemäß der Multidirektortheorie liegt für die 6-Parametertheorie bei 14.5 % und für die 7-Parametertheorie bei 6.7 %. Die Abweichungen sind hauptsächlich auf die mangelhafte Abbildung der Spannung in Dickenrichtung zurückzuführen - siehe σ_{33} in Feldmitte.



References

- [1] Schoop, H., Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen, Ingenieur-Archiv **56**, 427-437 (1986).
- [2] Bathe, K.-J. und Dvorkin, E., Short communication a four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation, Int. J. Num. Meth. Eng., **21**, 367-383, (1985).
- [3] Verhoeven, H., Geometrisch und physikalisch nichtlineare finite Plattenelemente mit Berücksichtigung der Dickenverzerrung, Dissertation TU Berlin (1992).
- [4] Simo, J.C. und Armero, F., Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes, Int. J. Num. Meth. Eng., **33**, 1413-1449, (1992).
- [5] Klinkel, S., Gruttmann, F. und Wagner, W., A continuum based three-dimensional shell element for laminated structures, Computers & Structures, **71**, 43-62, (1999).
- [6] MacNeal, R., Harder, R. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. Finite Elements in Analysis and Design, 3-20, (1985)